INHALTSVERZEICHNIS

M10 Lernbereich 1: Trigonometrie

M10 Lernbereich 2: Potenzen und Potenzfunktionen

M10 Lernbereich 3: Exponentialfunktionen, Logarithmen und Logarithmusfunktionen

… INHALTSVERZEICHNIS

❼ Besonders in der **Wahlpflichtfächergruppe I** geht es beim Themenbereich Trigonometrie nicht nur um das konkrete Berechnen einer Streckenlänge oder eines Winkelmaßes, sondern um das Darstellen von Zusammenhängen zwischen zwei Größen wie z. B. die Abhängigkeit der Länge einer Strecke vom Maß eines Winkels. Wir wollen das an zwei einfachen Beispielen üben (und in diesem Kapital auch auf den Tangens beschränkt 😜).

Wer die Behandlung **funktionaler Abhängigkeiten** hier als **zu früh** empfindet, kann direkt im

→ **Kapitel 1.2**

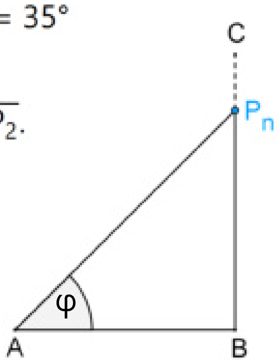
weitermachen!

In der **Wpfg. I** lassen sich in den Abschlussprüfungen jedoch fast ausschließlich Aufgaben dieser Art finden (siehe auch die Aufgabenbeispiele auf den folgenden Seiten), so dass eine frühe Einführung dieses Aufgabentypus sinnvoll erscheint.

a) Die Punkte P_n „wandern" auf der Strecke $\overline{BC}$ des rechtwinkligen Dreiecks ABC.
Es gilt: $|\overline{AB}| = 4$ cm und $|\overline{BC}| = 5$ cm ; $\varphi \in]0°; 51{,}34°]$.

„Phi"

- ☞ Zeichnen Sie die Dreiecke ABP_1 für $\varphi = 15°$ und ABP_2 für $\varphi = 35°$ rechts in die Zeichnung ein.
- ☞ Ermitteln Sie rechnerisch die Länge der Strecken $\overline{BP_1}$ und $\overline{BP_2}$. Runden Sie jeweils auf zwei Nachkommastellen.



Denk an den Hinweis von S. 2: Erst tan, dann multiplizieren!

- ☞ Geben Sie nun ganz allgemein die Länge der Strecke $\overline{BP_n}$ in Abhängigkeit des Winkels φ an.

Weil sich die Streckenlänge in Abhängigkeit des Winkelmaßes mithilfe einer Gleichung angeben lässt, spricht man von einer **funktionalen Abhängigkeit**. Die ist – mehrfach! – jedes Jahr in der Abschlussprüfung dran.

- ☞ Bestätigen Sie die obere Intervallgrenze von φ (siehe oben/Angabe: φ liegt stets im Intervall zwischen 0° und 51,34°).

← Typische Formulierung in der Abschlussprüfung

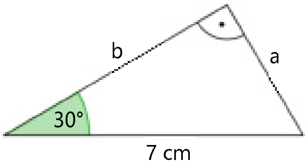
(Warum kann φ keinen Wert annehmen, der größer als 51,34° ist?
Berechne den größten Wert, den φ annehmen kann, dann gilt diese Intervall-Obergrenze als „bestätigt".)

Lösungen: 1,07 cm • 2,31 cm • $|\overline{BP_n}|(\varphi) = (4 \cdot \tan \varphi)$ cm • $\tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) = \ldots$

❸ Berechnen Sie die Länge der fehlenden Dreiecksseiten. Runden Sie – sofern nötig – alle Ergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma. Benutzen Sie nur sin, cos und tan.

(Theoretisch wäre es beim rechtwinkligen Dreieck ja immer möglich, die noch zu bestimmende dritte Seitenlänge über den Satz des Pythagoras zu ermitteln! 😅)

a)



$\cos 30° = \frac{b}{7\,cm}$

$\cos 30° \cdot 7\,cm = b$

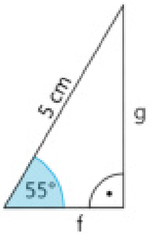
$\underline{b \approx 6{,}06\,cm}$

Vorsicht beim Eintippen von „cos 30 · 7"!

Je nach Taschenrechner könnte es sein, dass dieser hier „Punkt vor Strich" berücksichtigt und dann den Kosinus von 30° · 7 = 210° berechnet (statt nur cos 30°)!
⇒ völlig anderes Ergebnis!

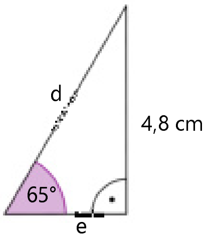
(vgl. auch Hinweis auf S. 2!)

b)

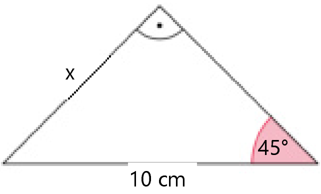


Skizzen sind nicht maßstabsgetreu!

c)



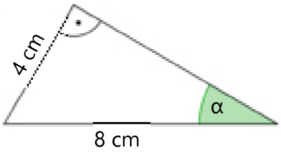
d)



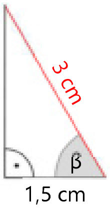
Lösungen (alle Angaben in cm): 2,24 • 2,87 • 3,5 • 4,10 • 5,30 • 7,07

❹ Umkehrung: Welche Maße haben die Winkel α, β, γ, δ und ε?
Ermitteln Sie über die entsprechenden Streckenverhältnisse von sin/cos/tan.
Runden Sie, falls nötig, zur Abwechslung auf ganze Grad.

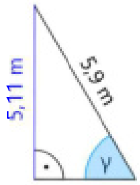
a)



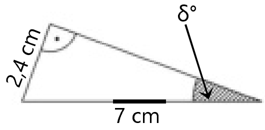
b)



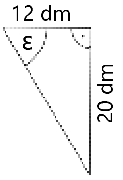
c)



d)



e)

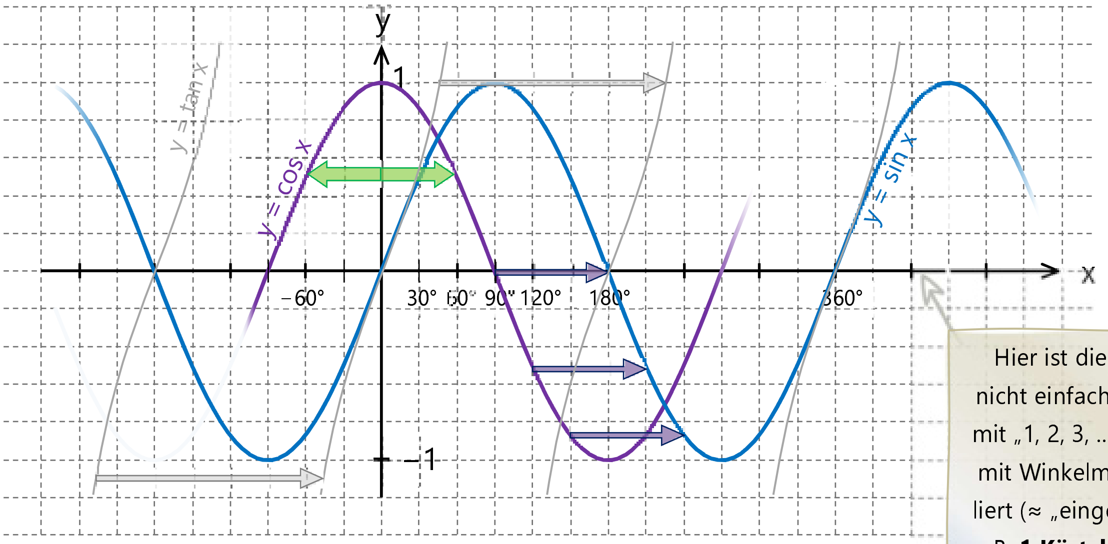


Lösungen: 20° • 30° • 59° • 60° • 60°

1.5 Funktionen mit y = sin α, y = cos α, y = tan α und weitere Zusammenhänge

→ exemplarische Darstellung der trigonometrischen Funktionen; Ergänzen fehlender Funktionswerte und Vervollständigen eines Funktionsgraphen (hier y = cos α); weitere einfache Zusammenhänge anhand der Darstellung nachvollziehen

❶ Jedem Winkelmaß lässt sich ein eindeutiger reeller Wert zuordnen (der bei *sin* und *cos* ja immer zwischen −1 und 1 liegt). Trägt man diesen dann in ein (etwas modifiziertes) Koordinatensystem ein, ergibt sich z. B. der typische Graph der Sinusfunktion (y = sin x).



Hier ist die x-Achse nicht einfach wie sonst mit „1, 2, 3, …“, sondern mit Winkelmaßen skaliert (≈ „eingeteilt“; hier z. B. **1 Kästchen** ≙ **30°**).

a) Bei der Kosinusfunktion ist in der obigen Darstellung nur eine „Schwingung“ dargestellt. Ergänzen Sie die fehlenden Werte in der Wertetabelle (ggf. auf zwei Nachkommastellen runden) und tragen Sie die Wertepaare dann ins obigen Koordinatensystem ein. Vervollständigen Sie so den Graphen der Kosinusfunktion über den ganzen dargestellten Ausschnitt der x-Achse hinweg.

cos …	y = …
270°	0
300°	
330°	
360°	
390° (= 30°)	

cos …	y = …
420° (= 60°)	
450° (= 90°)	
120°	
150°	

cos …	y = …
−90°	
−120°	
−150°	
−180°	
−240°	

b) Aus der obigen Grafik kann man schön ablesen: ***Beispiel:***

cos α = cos (−α) *(Symmetrie!)*	Siehe grüne Pfeile oben!	cos 60° = cos (−60°) ≈ ....
cos α = sin (α + 90°) *(bzw. sin α = cos (α − 90°))*	violette Pfeile oben	cos 90° = sin (90° + 90°) ≈ ....
tan α = tan (180° + α) *(vgl. auch S. 9)*	graue Pfeile	tan 45° = tan 225° = ...

c) Außerdem sieht man: Alle Funktionswerte wiederholen sich nach ....

1.8 Ein bisschen aufwendiger: **Die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus**

→ *(einfache) Beispiele zur Vereinfachung trigonometrischer Terme mithilfe der Additionstheoreme; Lösen von Gleichungen, bei denen die Anwendung der Additionstheorem notwendig ist; Beispiele aus Abschlussprüfungsaufgaben*

❶ Vereinfachen Sie mithilfe der Additionstheoreme.

a) $\sin(90° + \alpha) = \sin 90° \cdot \cos\alpha + \cos 90° \cdot \sin\alpha = 1 \cdot \cos\alpha + 0 \cdot \sin\alpha = \underline{\underline{\cos\alpha}}$

b) $\sin(90° - \beta) =$ ……………………………………………………………………

c) $\cos(\gamma + 90°) =$ ……………………………………………………………………

d) $\cos(90° - \delta) =$ ……………………………………………………………………

e) $\sin 2\varepsilon = \sin(\varepsilon + \varepsilon) =$ ……………………………………………………………

❷ Bestimmen Sie die Lösungsmenge für folgende Gleichungen. Es gilt bei allen Teilaufgaben: $\varphi \in [0°; 360[$

Bei fast allen Aufgaben, bei denen ein Additionstheorem Anwendung findet, brauchst du am Schluss die Formel

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi \;,$$

denn es kommt ja immer ein „sin“ und ein „cos“ in einer Zeile/Gleichung vor. Und die eliminierst du nur über die obigen Formel.

Beispiel: $3 \cdot \sin\varphi = 2 \cdot \cos\varphi.$

$\sin\varphi = \frac{2}{3} \cdot \cos\varphi$

$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{2}{3}$

$\tan\varphi = \frac{2}{3}$

…

auch auf der nächsten Seite!

a) $\sin(30° + \varphi) = 0{,}5\sqrt{3} \cdot \sin\varphi$

b) $\sin(60° + \varphi) = 2 \cdot \sin\varphi$

c) $\cos\varphi + \cos(60° - \varphi) = 0$

Lösungen: φ = 30° bzw. φ = 210° • φ = −60° (=300°) bzw. φ = 120° • φ = 90° bzw. φ = 270°

2.1 Potenzen mit rationalem Exponenten und die n-te Wurzel ($\sqrt[n]{\dots}$)

→ Überblick über das bisherige Wissen über Potenzen, Eingabe am TR, Wiederholung der Potenzgesetze und Übungen dazu, Potenzen mit rationalem Exponenten in Wurzelschreibweise angeben und umgekehrt

WIEDERHOLUNG 5. KLASSE

Das Produkt aus lauter gleichen Faktoren kann man als Potenz schreiben:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{5-mal}} = 2^5 = 32$$

$$\underbrace{\overset{\text{Basis}\to}{2}{}^{\overset{\text{Exponent}}{5}}}_{\text{Potenz}} = \underbrace{32}_{\text{Potenzwert}}$$

6. KLASSE: Die Basis kann rational (also auch eine Kommazahl oder ein Bruch) sein.

Beispiele:

$\boxed{1}$ $0{,}5^2 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$

$\boxed{2}$ $0{,}2^3 = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}008$

$\boxed{3}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}$

Ebenso möglich:

Die Basis kann auch negativ sein.
Achte hier darauf: Umgibt die Basis eine **Klammer oder nicht**?

$-2^4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16$

$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = \mathbf{+}16$

7. KLASSE: Auch der Exponent kann negativ sein!

$\boxed{1}$ $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

$\boxed{2}$ $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

$\boxed{3}$ $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10\,000}$

❶ Berechnen Sie (noch) ohne Taschenrechner:

a) $0{,}3^2 =$ ……………………

b) $3^{-3} =$ ……………………

c) $-3^3 =$ …………………… d) $(-4)^3 =$ …………………… e) $10^{-2} =$ ……………………

NEU! 10. KLASSE Der **Exponent** kann auch **rational** sein!

❷ Berechnen Sie den Potenzwert mithilfe des Taschenrechners. Runden Sie auf zwei Nachkommastellen.

Bei Brüchen im Exponenten die Klammer nicht vergessen!!
! $5^\wedge(1{,}8)$ EXE
Sonst berechnet der TR erst 5^1 (und das wäre 5) und dann : 8.
(also $\frac{5^1}{8}$)

a) $5^{1{,}7} \approx$ ……………………

b) $3^{-0{,}8} \approx$ ……………………

c) $5^{\frac{1}{8}} \approx$ ……………………

d) $22^{\frac{3}{4}} \approx$ ……………………

e) $400^{\left(-\frac{5}{9}\right)} \approx$ ……………………

Benutze wie beim Eingeben höherer Potenzen (wie z. B. bei 2^5) auch hier einfach die Potenz- bzw. „hoch"-Taste („Dach-Taste")

$5^{1,7}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\wedge}$ $\boxed{1}$ $\boxed{,}$ $\boxed{7}$ $\boxed{\text{EXE}}$

Lösungen: 0,04 • 0,42 • 1,22 • 10,16 • 15,43

2.3 Potenzfunktionen

→ Graphen von Potenzfunktionen richtig zuordnen (inkl. ihrer Definitions- und Wertemenge und Asymptoten), Gleichungen für Potenzfunktionen angeben (auch um $\vec{v}$ verschobene); Nullstellen berechnen; zusammenfassende Aufgabe, AP-Schnipsel

➊ Welche Funktionsgleichung und welcher Funktionsgraph gehören zusammen? Schreiben Sie den passenden Großbuchstaben in den Pfeilkasten. Ordnen Sie auch die passende Definitions- und Wertemenge sowie die Gleichung(en) der Asymptote(n) zu, indem Sie das passende Kästchen in derselben Farbe ausmalen wie die des jeweiligen Funktionsgraphen (siehe Beispiel A).
Zeichnen Sie – sofern vorhanden – auch die Asymptoten gestrichelt in derselben Farbe ein.

Überblick über die Potenzfunktionen:
Siehe Merkhilfe!

☞ *Nicht alle Kästchen werden benötigt bzw. ausgemalt!*

A $y = (x - 1)^{-2} + 1$

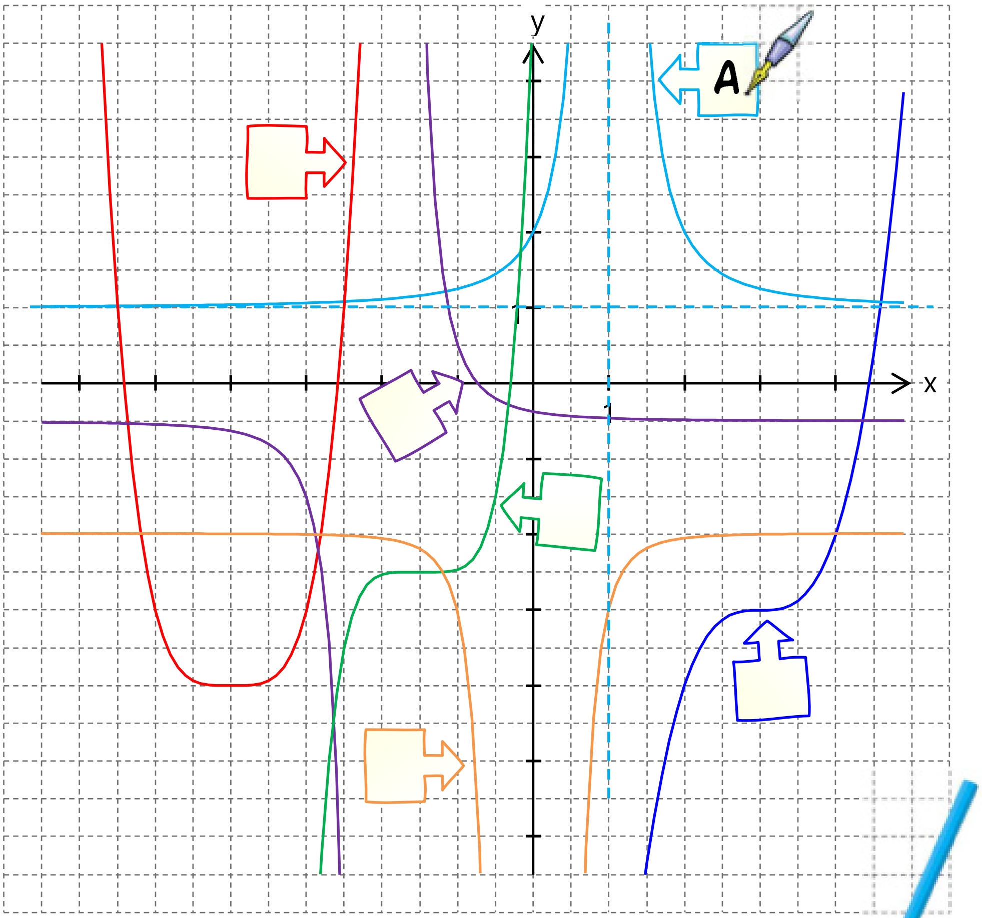
B $y = (x - 3)^{3} - 3$

C $y = (x + 4)^{4} - 4$

D $y = (x + 2)^{-3} - 0{,}5$

E $y = (x + 1{,}5)^{5} - 2{,}5$

F $y = -x^{-4} - 2$



D = IR\{−2}
W = {y|y ≤ −2}
W = {y|y ≥ 2,5}
D = IR
W = {y|y ≥ 1}
W = {y|y ≥ −4}
D = IR\{1}
D = IR\{0}
D = IR
W = IR
D = IR\{−3}
W = IR
D = IR
W = IR\{−3}
W = IR
W = IR\{−0,5}
W = IR^+

Asymptoten:

x = −1	x = −4	y = 4	x = −1,5	y = 1		
y = −0,5	x = 1	y = −4	y = −2	x = 0	y = −3	y = 1,5
y = 0	x = 3	x = 2	x = −2	y = 0,5	x = 0,5	x = −3

3.2 Die Exponentialfunktion

→ Zeichnen/Zuordnen von Graphen verschiedener Exponentialfunktionen, Funktionsgleichung verschobener Exponentialfkt. angeben, Sachverhalte durch Funktionsgleichungen beschreiben, zusammenfassende Aufgabe (D, W, Asymptote, Nullstelle...), AP-Beispiel

❶ Welche Funktionsgleichung gehört zu welchem Graphen?

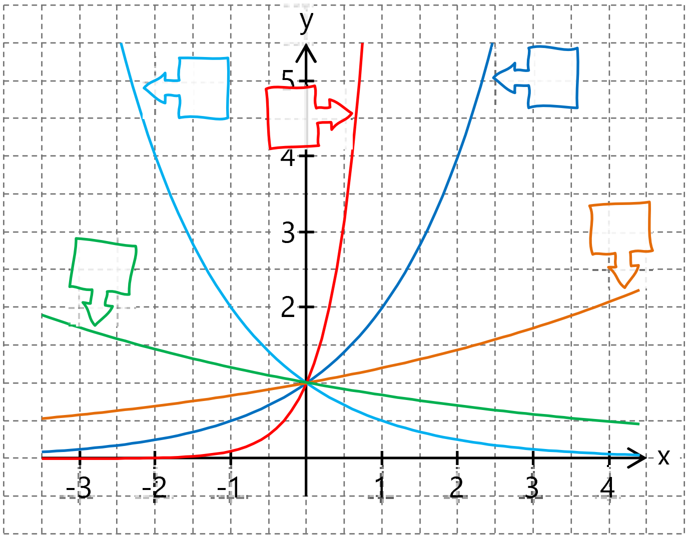
A $y = 2^x$

B $y = 10^x$

C $y = 0{,}5^x$

D $y = 1{,}2^x$

E $y = \left(\frac{5}{6}\right)^x$



a) Ist der Funktionsgraph $y = 0{,}5^x$ achsensymmetrisch zu **A**? ……………………

b) Ersetzen Sie in der Gleichung $y = 0{,}5^x$ das „x" mit „−x" und formen Sie (nachvollziehbar (*und ohne log!*)) die rechte Seite der Gleichung weiter um, bis dasteht: $y = 2^x$.

c) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion **F** mit der Funktionsgleichung $y = 2{,}5^x$ in das obigen Koordinatensystem ein. Erstellen Sie dazu eine Wertetabelle mit mindestens 0,5er-Schritten.

☞ *Überlegen Sie sich selbst ein geeignetes Intervall für x (also „von wo bis wo" die Tabelle gehen soll).*

x	
y	

⇨ Eine noch feinere Einteilung kann zum Zeichnen sinnvoll sein (vgl. Hinweis auf S. 53)!

d) Wie lautet die Funktionsgleichung ...

aa) für **A**, wenn der Graph um 3 Einheiten nach unten verschoben wird? ……………………

bb) für **C**, wenn der Graph um 1 Einheit nach links verschoben wird? ……………………………

cc) für **E**, wenn der Graph um 1 Einheit nach rechts und 2 Einheiten nach oben verschoben wird? ……………………………………………

dd) Wie könnte die Funktionsgleichung von **D** lauten, wenn Sie nicht durch den typischen Punkt (0|1) laufen soll? ……………………………………………

4.3 Spiegelung an einer Ursprungsgeraden: Die Spiegelmatrix

→ Spiegeln von Punkten/Bestimmungsstücken an einer Ursprungsgeraden mithilfe der Spiegelmatrix;
spezielle Matrizen zur Spiegelung an den Koordinatenachsen

Die Vorgehensweise bei der Spiegelung von Punkten bzw. Pfeilen an einer Geraden mithilfe einer Matrix ist prinzipiell dieselbe wie bei der Drehung, nur die Matrix ist eben eine andere (siehe Merkhilfe!). Und man muss vorab die Steigung aus der Geradengleichung in ein Winkelmaß umrechnen (das brauchst du zum Einsetzen in die Spiegelmatrix).

$m = \tan\alpha$

❶ a) Der Pfeil $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ soll an der Ursprungsgeraden g mit der Funktionsgleichung $y = \frac{1}{2}x$ gespiegelt werden. Wie lautet das entsprechende Winkelmaß α, das Sie für die Spiegelmatrix benötigen? Runden Sie auf zwei Nachkommastellen.

$\alpha =$ ______

b) Der Pfeil mit den Koordinaten $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ soll an der Geraden h: $y = 0{,}25x$ gespiegelt werden. Welchen Wert für α muss man hier in die Spiegelmatrix einsetzen? Runden Sie auch hier auf zwei Nachkommastellen.

$$\begin{pmatrix} \cos(2\cdot\alpha) & \sin(2\cdot\alpha) \\ \sin(2\cdot\alpha) & -\cos(2\cdot\alpha) \end{pmatrix}$$

c) An der Spiegelgeraden k mit der Funktionsgleichung $y = 2x$ wird der Punkt P(3|2,5) gespiegelt. Ergänzen Sie die Lücken in der Spiegelmatrix.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\boxed{} & \sin\boxed{} \\ \sin\boxed{} & -\cos\boxed{} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

❷ Führen Sie die Achsenspiegelung aus Aufgabe ❶ a + b zu Ende: Wie lauten die Koordinaten der an g bzw. h gespiegelten Pfeile? (bei a) ist übrigens α ≈ 26,57° und bei b) ist α ≈ 14,04° 😉). Runden Sie die Koordinaten ebenfalls auf zwei Nachkommastellen.

Lösungen: $\begin{pmatrix} 2{,}20 \\ 2{,}10 \end{pmatrix}$ • $\begin{pmatrix} 3{,}06 \\ 2{,}77 \end{pmatrix}$

❿ Hier wieder ein Schnipsel aus den Musteraufgaben (vgl. Hinweis S. 93):

Der Lernbereich 5 *„Daten und Zufall“* ist für die Wpfg. I und II absolut identisch.

⇒ Zur Übung böte sich hier zusätzlich auch noch die „Beispielaufgabe“ A2 der Musterabschlussprüfung der Gruppe II an (da geht's um den Pausenverkauf und die angebotenen Brötchen-Kombinationen).

„Beispielaufgaben Abschlussprüfung Mathematik II (ab 2023)“, A4

Aufgabengruppe A **Muster 20XX**

A 4.0 In einem Kartenspiel mit insgesamt 100 Karten befinden sich jeweils 20 Ziffernkarten in den Farben rot, gelb, grün und blau. Pro Farbe sind jeweils zwei Karten mit den Ziffern 0 bis 9 beschriftet. Die übrigen 20 Karten sind Sonderkarten.

Die Karten werden gemischt und verdeckt verteilt. Bruno erhält die beiden ersten Karten.

A 4.1 Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass Bruno als erstes eine gelbe Ziffernkarte mit der Ziffer 0 erhält.

Unter den 100 Karten gibt es laut Angabe nur zwei gelbe Ziffernkarten. Die Wahrscheinlichkeit, dass er eine davon gleich als erstes bekommt, ist $\frac{2}{100}$ (= 0,02 oder 2 %)

A 4.2 Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass Bruno als erstes eine grüne oder eine rote Ziffernkarte erhält.

P(grüne Ziffernkarte) = $\frac{20}{100}$

P(rote Ziffernkarte) = $\frac{20}{100}$ ⇒ P(grüne oder rote Z.karte) = $\frac{40}{100}$

(= 0,4 bzw. 40 %)

A 4.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Bruno zwei Sonderkarten erhält.

P(„zwei Sonderkarten“) = $\frac{20}{100} \cdot \frac{19}{99} = \frac{380}{9900}$ (= 0,0383838… ≈ 3,8 %)

Nach dem ersten Ziehen einer Sonderkarte sind von den 20 nur noch 19 da. Beim zweiten Ziehen stehen dann ohnehin nur noch 99 Karten zur Verfügung, als ist die Wahrscheinlichkeit für „Die zweite Karte ist (auch) eine Sonderkarte“ = $\frac{19}{99}$.

Lösungen: 2 % · 40 % · $\frac{380}{9900}$